Matematyka dyskretna
Funkcje tworzące i wielomiany charakterystyczne

Karol Pąk

Definicja

Niech dany będzie ciąg liczb rzeczywistych (opcjonalnie zespolonych) $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$. Funkcję

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

nazywamy *zwykłą funkcją tworzącą* lub krótko *funkcją tworzącą* ciągu. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zmienną $x \in \mathbb{C}$ nazywamy zmienną formalną.

Przykład

Wyrażenie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$ jest funkcją tworzącą, ala suma ta jest zbieżna tylko dla $|x| < \frac{1}{2}$.

Uwaga

Funkcja tworząca jako szereg potęgowy posiada *promień zbierzności* tj. liczbę rzeczywistą $R \geq 0$, dla której jest absolutnie zbierzny jeśli $|x| < R$. Niestety promień zbierzności R może być zerowy (np. w szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$). W takich przypadkach możemy zastosować *wykładniczą funkcję tworzącą* o postaci $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{x^n}{n!}$. Rozwiązanie to nie gwarantuje jednak $R > 0$.

Sumowanie

Niech dane będą ciągi liczb $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ $b_0, b_1, b_2, \ldots$ oraz odpowiadające im funkcje tworzące $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Wówczas suma

$$A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

jest funkcją tworzacą ciągu $a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots$.

Funkcje tworzące – własności

Skalowanie stałą λ

Niech dany będą ciągi liczb $a_0, a_1, a_2, \ldots$ oraz odpowiadająca jemu funkcja tworząca $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wówczas iloczyn

$$\lambda \cdot A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_n) x^n$$

jest funkcją tworzacą ciągu $\lambda \cdot a_0, \lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \ldots$.

Różniczkowanie

Niech dany będą ciągi liczb $a_0, a_1, a_2, \ldots$ oraz odpowiadająca jemu funkcja tworząca $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wówczas

$$A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} x^n$$

jest funkcją tworzacą ciągu $a_1, 2 \cdot a_2, 3 \cdot a_3, \ldots$.

Całkowanie

Niech dany będą ciągi liczb $a_0, a_1, a_2, \ldots$ oraz odpowiadająca jemu funkcja tworząca $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wówczas

$$\int_0^x A(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

jest funkcją tworzacą ciągu $0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \frac{a_3}{4} \ldots$.

Funkcje tworzące – własności

Przesunięcia przypadek $k = 1$

Niech dany będą ciągi liczb $a_0, a_1, a_2, \dots$ oraz odpowiadająca jemu funkcja tworząca $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wówczas

$$x \cdot A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1}$$

jest funkcją tworzacą ciągu $0, a_0, a_1, a_2, \dots$, natomiast

$$\frac{A(x) - a_0}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n$$

jest funkcją tworzacą ciągu $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

Przesunięcia przypadek ogólny

Niech dany będą ciągi liczb $a_0, a_1, a_2, \ldots$ oraz odpowiadająca jemu funkcja tworząca $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wówczas

$$x^k \cdot A(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+k}$$

jest funkcją tworzacą ciągu $\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ razy}}, a_0, a_1, a_2, \ldots,$ natomiast

$$\frac{A(x) - a_0 x^0 - a_1 x^1 - a_{k-1} x^{k-1}}{x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^n$$

jest funkcją tworzacą ciągu $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots$

Iloczyn

Niech dane będą ciągi liczb $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ $b_0, b_1, b_2, \ldots$ oraz odpowiadające im funkcje tworzące $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Wówczas iloczyn

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_{n-j} \right) x^n$$

jest funkcją tworzacą ciągu $a_0 \cdot b_0,$,

Funkcje tworzące dla wybranych ciagów

Ciąg	Funkcja tworząca
$1, 1, 1, \ldots$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$
$1, a, a^2, a^3, \ldots$	$\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} (ax)^n$
$0, 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$
$1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots$	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Funkcje tworzące dla wybranych ciągów cd.

Uogólniony współczynnik Newtona

$$\binom{\text{-n}}{\text{k}} = (-1)^k \cdot \binom{\text{n+k-1}}{\text{k}}$$

Funkcja tworząca ciągu $(-1)^k \cdot \binom{\text{n+k-1}}{\text{k}}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{\text{n+k-1}}{\text{k}} = \frac{1}{(1-x)^n}$$

Ciąg Fibonacciego z przesunięciem

Rozważmy ciąg $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ określonym wzorem rekurencyjnym:

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, 1, \\ w_{n-1} + w_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Rozważamy funkcję tworzącą odpowiadającą ciągowi $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$

Rozważmy ciąg $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ określonym wzorem rekurencyjnym:

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, 1, \\ w_{n-1} + w_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Rozważamy funkcję tworzącą odpowiadającą ciągowi $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$

Wyodrębniamy dwa elementy szeregu.

Ciąg Fibonacciego z przesunięciem

Rozważmy ciąg $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ określonym wzorem rekurencyjnym:

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, 1, \\ w_{n-1} + w_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Rozważamy funkcję tworzącą odpowiadającą ciągowi $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n = w_0 x^0 + w_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} w_n x^n$$

Aplikujemy zależność rekurencyjną $w_n = w_{n-1} + w_{n-2}$.

Ciąg Fibonacciego z przesunięciem

Rozważmy ciąg $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ określonym wzorem rekurencyjnym:

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, 1, \\ w_{n-1} + w_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Rozważamy funkcję tworzącą odpowiadającą ciągowi $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n = w_0 x^0 + w_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} w_n x^n$$
$$= w_0 x^0 + w_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (w_{n-1} + w_{n-2}) x^n$$

Aplikujemy własność sumowania.

Ciąg Fibonacciego z przesunięciem

Rozważmy ciąg $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ określonym wzorem rekurencyjnym:

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, 1, \\ w_{n-1} + w_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Rozważamy funkcję tworzącą odpowiadającą ciągowi $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n = w_0 x^0 + w_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} w_n x^n$$
$$= w_0 x^0 + w_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (w_{n-1} + w_{n-2}) x^n$$
$$= w_0 x^0 + w_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} w_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} w_{n-2} x^n$$

Modyfikujemy indeksy.

Ciąg Fibonacciego z przesunięciem

Rozważmy ciąg $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ określonym wzorem rekurencyjnym:

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, 1, \\ w_{n-1} + w_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Rozważamy funkcję tworzącą odpowiadającą ciągowi $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} W(x) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n = w_0x^0 + w_1x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} w_n x^n \\ &= w_0x^0 + w_1x^1 + \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} (w_{n-1} + w_{n-2})x^n \\ &= w_0x^0 + w_1x^1 + \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} w_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} w_{n-2}x^n \\ &= w_0x^0 + w_1x^1 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n x^{n+1} + x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n \end{aligned}$$

Aplikujemy równości $w_0 = 1, w_1 = 1$ oraz wzór na przesunięcie.

Ciąg Fibonacciego z przesunięciem

Rozważmy ciąg $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ określonym wzorem rekurencyjnym:

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, 1, \\ w_{n-1} + w_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Rozważamy funkcję tworzącą odpowiadającą ciągowi $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} W(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n = w_0 x^0 + w_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} w_n x^n \\ &= w_0 x^0 + w_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (w_{n-1} + w_{n-2}) x^n \\ &= w_0 x^0 + w_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} w_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} w_{n-2} x^n \\ &= w_0 x^0 + w_1 x^1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n x^{n+1} + x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n \\ &= 1 + x + x \cdot (W(x) - w_0 x^0) + x^2 \cdot W(x) \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy $W(x) = 1 + x \cdot W(x) + x^2 \cdot W(x)$.

Rozkład na ułamki proste

W szczególności $W(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$

Uwaga

Pierwiastki wielomianu $1 - x - x^2$ to $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ i $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ co sugeruje rozkład do postaci:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{A}{x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}},$$

ale we wzorze na sumę ciągu geometrycznego mamy wyrażenie postaci $\frac{a}{1-bx}$, dlatego wyodrębniamy czynniki $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ przed rozpoczęciem wyznaczania A i B.

Nowy rozkład

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{A'}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x} + \frac{B'}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

Rozkład na ułamki proste

Łatwo uzyskujemy $A' = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $B' = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, a stąd:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} =$$
$$-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1-\sqrt{5}}{2}x)^n + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1+\sqrt{5}}{2}x)^n =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2}x)^n + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} (\frac{1+\sqrt{5}}{2}x)^n\right) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\right) x^n =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})}_{w_n} \right) x^n$$

Rozważmy ciąg $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ określający wartość funkcji silnia, określony wzorem rekurencyjnym:

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1, \\ n \cdot a_{n-1} & \text{dla } n >= 1 \end{cases}$$

Rozważamy funkcję tworzącą odpowiadającą ciągowi $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = s_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n = s_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot s_{n-1} x^n$$

Pomysły

- $n \cdot s_{n-1}x^n = (s_{n-1}x^n)' \cdot x$, co prowadzi do równania różniczkowego $S(x) = 1 + x \cdot S'(x)$.
- Na początku wykładu jest stwierdzone, że szereg $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ ma promień zbierzności 0.
- Spróbować wykorzystać wykładniczą funkcję tworzącą.

Silnia — dość trudny przykład

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} x^n = \underbrace{\frac{s_0}{0!}}_{=1} x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot s_{n-1}}{n!} x^n =$$

$$1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} = 1 + x \cdot W(x)$$

Stąd ostatecznie:

$$W(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n!}_{s_n} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Równanie charakterystyczne — prosta metoda na proste przypadki

Niech dane będzie $k \in \mathbb{N}_+$. Liniowym równaniem rekurencyjnym jednorodnym o stałych współczynnikach rzędu k nazywamy każdą zależność postaci:

$$x_n = a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \ldots + a_k \cdot x_{n-k} \tag{1}$$

gdzie $a_1, a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$. Oczywiście poprawne określenie ciągu $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wymaga również wskazania k-pierwszych elementów. Natomiast *równaniem chararakterystycznym* stoważyszonym z (6) nazywamy wielomian $x^n - a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + a_k \cdot x^{n-k}$ (uwaga indeksy dolne pełnią teraz rolę potęgi).

Równanie charakterystyczne — prosta metoda na proste przypadki

Twierdzenie

Niech dane będzie $k \in \mathbb{N}_+$, równanie chararakterystyczne $x^n - a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + a_k \cdot x^{n-k}$ oraz k jego różnych pierwiastków $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Wówczas równanie rekurencyjne

$$x_n = a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \ldots + a_k \cdot x_{n-k}$$

posiada rozwiązanie postaci:

$$x_n = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n + \ldots + C_k \cdot \lambda_k^n, \tag{2}$$

gdzie $C_1, C_2, \ldots, C_k$ są pewnymi stałymi.

Ciąg Fibonacciego jest zdefiniowany równaniem rekurencyjnym jednorodnym rzędu 2, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Skojarzony wielomian charakterystyczny ma postać $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$, który po skróceniu i przekształceniu ma postać $x^2 - x - 1 = 0$. Równanie to ma dwa pierwiastki

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

więc wzór jawny ma postać:

$$f_n = C_1 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + C_2 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n.$$

Podstawiając wartości $n = 0, 1$ oraz wykorzystując wartości początkowe $f_0 = f_1 = 1$, uzyskujemy układ równań liniowych, którego rozwiązaniem jest

$$C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, C_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Równanie charakterystyczne — uwagi

- zależność rekurencyjna w problemie Wieża Hanoi nie jest równaniem rekurencyjnym jednorodnym o stałych współczynnikach i nie możemy stosować metody wykorzystującej równanie charakterystyczne.
- Jeśli równanie charakterystyczne posiada pierwiastki krotne, to rozwiązaniem nie jest wyrażenie postaci (3).

Równanie charakterystyczne – pierwiastki krotne

Równanie kwadratowe z pierwiastkiem krotnym

Niech dane będzie równanie chararakterystyczne $x^n - a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2}$ posiadające pierwiastek krotny λ. Wówczas równanie rekurencyjne

$$x_n = a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2}$$

posiada rozwiązanie postaci:

$$x_n = C_1 \cdot \lambda^n + C_2 \cdot n \cdot \lambda^n, \tag{3}$$

gdzie C_1, C_2 są pewnymi stałymi.

Przykład

Rozważmy zależność rekrencyjną $a_n = 6 \cdot a_{n-1} - 9 \cdot a_{n-2}$ z warunkami początkowymi: $a_0 = 1$, $a_1 = 6$. Równanie charakterystyczne ma wówczas postać $x^2 = 6x - 9$. Po przekształceniu $0 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, więc rozwiązanie ma postać: $a_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n$. Podstawiamy warunki początkowe.

$$\begin{cases} 1 = a_0 = C_1 \cdot 3^0 + C_2 \cdot 0 \cdot 3^0 \\ 6 = a_1 = C_1 \cdot 3^1 + C_2 \cdot 1 \cdot 3^1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Stąd ostatecznie $a_n = 3^n + n \cdot 3^n$. Sprawdzamy czy nie zrobiliśmy gdzieś błędu. Wzór jest prawdziwy dla $n = 0, 1$. Stosujemy indukcję zupełną (bo odwołujemy się do 2 wcześniejszych wyrazów a nie tylko ostatniego). $a_{n+1} = 6 \cdot a_n - 9 \cdot a_{n-1} =$
$6 \cdot (3^n + n \cdot 3^n) - 9 \cdot (3^{n-1} + (n-1) \cdot 3^{n-1}) =$
$(6 \cdot 3^n - 9 \cdot 3^{n-1} + 9 \cdot 3^{n-1}) + n \cdot (6 \cdot 3^n - 9 \cdot 3^{n-1}) =$
$6 \cdot 3^n + n \cdot (6 \cdot 3^n - 3 \cdot 3^n) = 2 \cdot 3^{n+1} + n \cdot 3^{n+1} = 3^{n+1} + (n+1) \cdot 3^{n+1}$ □

Twierdzenie

Niech dane będzie $k \in \mathbb{N}_+$, równanie chararakterystyczne $x^n - a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + a_k \cdot x^{n-k}$ oraz i jego różnych pierwiastków $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$, gdzie k_j jest krotnością pierwiastka λ_j dla $j = 1, 2, \ldots, i$ oraz $k_1 + k_2 + \ldots k_i = k$. Wówczas równanie rekurencyjne

$$x_n = a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \ldots + a_k \cdot x_{n-k}$$

posiada rozwiązanie postaci:

$$\begin{aligned} x_n = & (C_1^1 \cdot + n \cdot C_1^2 + \ldots + n^{k_1 - 1} \cdot C_1^{k_1 - 1})\lambda_1^n + \\ & (C_2^1 \cdot + n \cdot C_2^2 + \ldots + n^{k_1 - 1} \cdot C_2^{k_2 - 1})\lambda_2^n + \\ & \ldots + \\ & (C_i^1 \cdot + n \cdot C_i^2 + \ldots + n^{k_i - 1} \cdot C_i^{k_i - 1})\lambda_i^n \end{aligned}$$

gdzie C_*^* są pewnymi stałymi.

Równanie charakterystyczne $\mathbb{C}$

Z zasadniczego twierdzenia algebry każdy niezerowego stopnia wielomian o współczynnikach $\mathbb{R}$ ma pierwiastek. Z tego twierdzenia nie wynika jednak że pierwiastek ten jest rzeczywisty.

Przykład

Rozważmy zależność rekrencyjną $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-2}$ z warunkami początkowymi: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$. Równanie charakterystyczne $x^2 - 2x + 2 = 0$ posiada pierwiastki $1 - i$, $1 + i$, więc rozwiązanie ma postać: $a_n = C_1 \cdot (1 - i)^n + C_2 \cdot n \cdot (1 + i)^n$. Podstawiamy warunki początkowe.

$$\begin{cases} 1 = a_0 = C_1 \cdot (1-i)^0 + C_2 \cdot (1+i)^0 \\ 1 = a_1 = C_1 \cdot (1-i)^1 + C_2 \cdot (1+i)^1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = 1\frac{1}{2} \end{cases} \tag{5}$$

Stąd ostatecznie $a_n = \frac{1}{2} \cdot ((1-i)^n + (1+i)^n)$. Dowód indukcyjny – ćwiczenie.

Niech dane będzie $k \in \mathbb{N}_+$. Równaniem rekurencyjnym niejednorodnym o rzędu k nazywamy każdą zależność postaci:

$$x_n = a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \ldots + a_k \cdot x_{n-k} + f(n) \qquad (6)$$

gdzie $a_1, a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, f funkcją jednej zmiennej. Rozwiązanie ogólne ma postać $x_n = RO(n) + RS(n)$, gdzie $RO(n)$ nazywane *rozwiązaniem ogólny* jest rozwiązaniem równania jednorodnego $x_n = a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \ldots + a_k \cdot x_{n-k}$, natomiast $RS(n)$ nazywany *rozwiązaniem szczegółowym*.

Uwaga

Nie istnieje metoda znajdowania $RS(n)$ w ogólnym przypadku, istnieje metoda przywidywań dla wybranych postaci funkcji f.

Wielomiany

Jeżeli f jest wielomianem stopnia d, to przywidujemy rozwiązanie szczegółowe o postaci:

$$RS(n) = C_0 + C_1 n^1 + \ldots + C_d n^d.$$

Najpopularniejszy ale **nie jedyny wyjątek**: Jeżeli rozwiązanie ogólne ma również postać wielomianu stopnia k, to:

$$RS(n) = n^{k+1}(C_0 + C_1 n^1 + \ldots + C_d n^d).$$

Funkcje wykładnicze

Jeżeli f ma postać $a \cdot \lambda^n$, to przywidujemy rozwiązanie szczegółowe o postaci:

$$RS(n) = C \cdot \lambda^n.$$

Najpopularniejszy ale **nie jedyny wyjątek**: Jeżeli λ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego równania jednorodnego o krotności k, to:

$$RS(n) = C \cdot n^k \lambda^k.$$

Suma

Jeżeli f ma postać sumy klilku funkcji, to możemy zastosować metodę przywidywań do każdego składnika sumy.

Podział zbioru na dwa niepuste zbiory 5.5[PR]

Liczba podziałów na dwa niepuste zbiory określona jest rekurencyjnie $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Równanie jednorodne: $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ posiadające wielomian charakterystyczny $x - 2 = 0$, pierwiastek wielomianu 2, więc $RO(n) = C \cdot 2^n$. Równanie niejednorodne: $a_n = 1$ jest wielomian stopnia 0, więc $RS(n) = A$. Stąd

$$a_n = C \cdot 2^n + A \tag{7}$$

Podstawiamy warunki początkowe:

$$\begin{cases} 0 = a_1 = C \cdot 2^1 + A \\ 1 = a_2 = C \cdot 2^2 + A \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{2} \\ A = -1 \end{cases} \tag{8}$$

Stąd $a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n - 1$.

Podział zbioru na trzy niepuste zbiory 5.6[PR]

Liczba podziałów na trzy niepuste zbiory określona jest rekurencyjnie $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2^{n-2} + 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$. Równanie jednorodne: $a_n = 3 \cdot a_{n-1}$ posiadające wielomian charakterystyczny $x - 3 = 0$, pierwiastek wielomianu 2, więc $RO(n) = C \cdot 3^n$. Równanie niejednorodne: $a_n = 2^{n-2} + 1$ jest funkcją wykładniczą, więc $RS_1(n) = A \cdot 2^n$ (uwaga 1: $2 \neq 3$, 2: nie ma znaczenia czy podstawimy $n - 2$ czy n, wpłynie to jedynie na wartość A) oraz wielomian stopnia 0, więc $RS_2(n) = B$. Stąd $a_n = C \cdot 3^n + A \cdot 2^n + B$. Podstawiamy warunki początkowe:

$$\begin{cases} 0 = a_1 = C \cdot 3^1 + A \cdot 2^1 + B \\ 0 = a_2 = C \cdot 3^2 + A \cdot 2^2 + B \\ 1 = a_3 = C \cdot 3^3 + A \cdot 2^4 + B \end{cases} \implies \begin{cases} C = \frac{1}{6} \\ A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{9}$$

Stąd $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot 2^n + \frac{1}{2}$.