

# 6. WPROWADZENIE DO GRAFÓW I DRZEW

Z grafami i grafami skierowanymi zapoznaliśmy się już w rozdziale 3; były tam one wykorzystane do ilustrowania relacji. W tym rozdziale omówimy podstawy samej teorii grafów i grafów skierowanych. W paragrafie 6.1 omówimy podstawowe pojęcia i wprowadzimy terminologię, w paragrafach 6.2 i 6.5 omówimy drogi mające pewne specjalne własności. Pozostała część tego rozdziału jest poświęcona drzewom, które będziemy następnie badać w rozdziale 7. Drzewa są grafami, które w naturalny sposób można również traktować jako grafy skierowane. Paragraf 6.4 jest poświęcony drzewom z wyróżnionym korzeniem, które często występują jako struktury danych. W ostatnim paragrafie tego rozdziału zajmujemy się grafami, których krawędzie mają wagi i pokazujemy dwa algorytmy do konstruowania drzew spinających o minimalnej wadze.

## § 6.1. Grafy

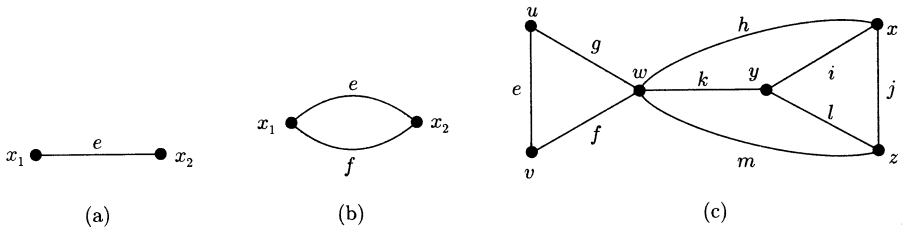
W paragrafie 3.2 wprowadziliśmy pojęcie grafu skierowanego i grafu nieskierowanego. Zajmiemy się teraz bardziej szczegółowym badaniem grafów nieskierowanych. Przypomnijmy z § 3.2, że **drogą długości  $n$**  nazywamy ciąg  $e_1 e_2 \dots e_n$  krawędzi, wraz z ciągiem  $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$  wierzchołków, takim, że  $\gamma(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $\gamma$  jest tu funkcją, która podaje wierzchołki będące końcami każdej krawędzi. Wierzchołki  $v_i$  i  $v_{i+1}$  mogą być równe, w takim przypadku krawędź  $e_i$  jest **pętlą**. Jeśli  $v_{n+1} = v_1$ , to taką drogę nazywamy **drogą zamkniętą**.

Droga zamknięta może składać się z tego samego ciągu krawędzi, przechodzonych „tam i z powrotem”, na przykład  $efggfe$ . Jednak w naszych dalszych rozważaniach najważniejszymi drogami zamkniętymi będą drogi, w których żadna krawędź się nie powtarza. Drogę nazywamy **drogą prostą**, jeśli jej wszystkie krawędzie są różne. Zatem w drodze prostej żadna krawędź nie jest wykorzystana dwa razy, chociaż taka droga może przechodzić przez ten sam wierzchołek więcej niż jeden raz. Zamkniętą drogę prostą, której ciągiem wierzchołków jest ciąg  $x_1 \dots x_n x_1$  nazywamy **cyklem**, jeśli wierzchołki  $x_1, \dots, x_n$  są różne. Graf nie zawierający cykli nazywamy **grafem acyklicznym**. Zobaczmy niedługo, że graf jest acykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera zamkniętych dróg prostych.

**Drogę** nazywamy **acykliczną**, jeśli „podgraf” składający się z wierzchołków i krawędzi tej drogi jest acykliczny. W ogólności graf  $H$  jest podgrafem grafu  $G$ , jeśli  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$  oraz funkcja  $\gamma$  grafu  $G$ , określona na  $E(G)$ , pokrywa się z funkcją  $\gamma$  grafu  $H$ , określoną na  $E(H)$ . Jeśli graf  $G$  nie ma krawędzi wielokrotnych i jeśli traktujemy zbiór  $E(G)$  jako zbiór jedno- i dwuelementowych podzbiorów  $V(G)$ , to warunek nałożony na funkcję  $\gamma$  wynika z inkluzji  $E(H) \subseteq E(G)$ . Wprost z definicji wynika, że jeśli  $H$  jest podgrafem grafu  $G$  i graf  $G$  jest acykliczny, to graf  $H$  też jest acykliczny.

**PRZYKŁAD 1**

(a) Weźmy graf przedstawiony na rysunku 6.1(a). Droga  $ee$  wraz z ciągiem wierzchołków  $x_1 x_2 x_1$  jest drogą zamkniętą, ale nie jest cyklem, gdyż nie jest drogą prostą. Podobnie nie jest cyklem droga  $ee$  wraz z ciągiem wierzchołków  $x_2 x_1 x_2$ . Ten graf jest acykliczny.



**Rysunek 6.1**

(b) Droga  $ef$  z ciągiem wierzchołków  $x_1 x_2 x_1$  w grafie przedstawionym na rysunku 6.1(b) jest cyklem. Podobnie jest cyklem droga  $ef$  wraz z ciągiem wierzchołków  $x_2 x_1 x_2$ .

(c) W grafie pokazanym na rysunku 6.1(c) droga  $efhikg$  długości 6 wraz z ciągiem wierzchołków  $uvwxywu$  jest drogą zamkniętą i prostą, ale nie jest cyklem, gdyż nie wszystkie wierzchołki spośród jej pierwszych sześciu wierzchołków  $u, v, w, x, y$  i  $w$  są różne. Droga, której ciągiem wierzchołków jest  $uvwvwvu$  również nie jest cyklem. Graf, jako całość, nie jest acykliczny. Acykliczne nie są również te dwie drogi, ponieważ  $uvwu$  jest cyklem w obu ich podgrafach. ■

Droga  $e_1 \dots e_n$  w grafie  $G$  wraz z ciągiem wierzchołków  $x_1 \dots x_{n+1}$ , różnych między sobą, musi oczywiście być drogą prostą, ponieważ żadne dwie krawędzie w niej nie mogą mieć tego samego zbioru końców. Przykład 1(a) pokazuje jednak, że droga zamknięta, w której wierzchołki  $x_1, \dots, x_n$  są różne, nie musi być drogą prostą. Ten przykład złej drogi, która jest drogą zamkniętą długości 2, jest tak naprawdę jedynym takim przykładem, jak pokazuje następujące stwierdzenie.

**Stwierdzenie 1**

Każda droga zamknięta  $e_1 \dots e_n$ , długości co najmniej 3, o różnych wierzchołkach  $x_1, \dots, x_n$ , jest cyklem.

**Dowód.** Musimy tylko pokazać, że krawędzie  $e_1, \dots, e_n$  są różne. Ponieważ wierzchołki  $x_1, \dots, x_n$  są różne, więc droga  $e_1 \dots e_{n-1}$  jest drogą prostą. To znaczy, że wszystkie krawędzie  $e_1, \dots, e_{n-1}$  są różne. Ale przecież  $\gamma(e_n) = \{x_n, x_1\}$  oraz  $\gamma(e_i) = \{x_i, x_{i+1}\}$  dla  $i < n$ . Ponieważ  $n \geq 3$ ,  $e_n \neq e_i$  dla  $i < n$ , więc ta droga jest drogą prostą. ■

Dla dróg, które nie są zamknięte, fakt, że wierzchołki są różne, można scharakteryzować w inny sposób.

**Stwierdzenie 2**

Droga ma wszystkie wierzchołki różne wtedy i tylko wtedy, gdy jest prosta i acykliczna.

**Dowód.** Weźmy najpierw drogę o różnych wierzchołkach. Musi ona być prosta, jak stwierdziliśmy to wcześniej. Podgraf składający się z wierzchołków i krawędzi tej drogi może być narysowany tak, że wierzchołki leżą na linii prostej, a więc oczywiście jest acykliczny.

W drugą stronę, przypuśćmy, że droga prosta ma ciąg wierzchołków  $x_1 \dots x_{n+1}$ , przy czym niektóre wierzchołki się powtarzają. Weźmy dwa takie wierzchołki, powiedzmy  $x_i$  i  $x_j$ , gdzie

$i < j$  oraz różnica  $j - i$  jest możliwie najmniejsza. Wtedy wierzchołki  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}$  są różne, a zatem droga prosta  $x_i x_{i+1} \dots x_{j-1} x_j$  jest cyklem (nawet jeśli  $j = i + 1$ ), więc początkowa droga zawiera cykl. ■

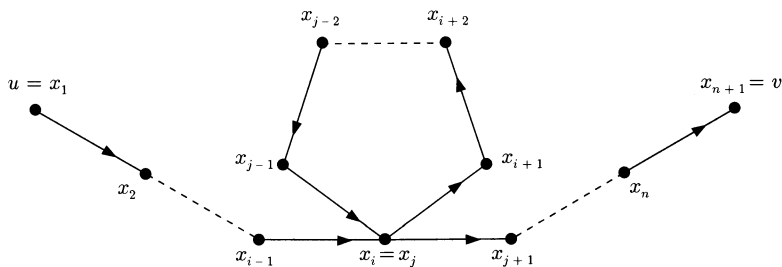
Ze stwierdzenia 2 wynika, że każda prosta droga zamknięta zawiera cykl i tak naprawdę dowód pokazuje, że taki cykl może składać się z kolejnych krawędzi w tej drodze. Inną konsekwencją stwierdzenia 2 jest to, że jeśli graf jest acykliczny, to nie zawiera on cykli i wobec tego nie zawiera prostych dróg zamkniętych. Przyjrzymy się dokładniej takim grafom w następnych paragrafach poświęconych drzewom.

W terminologii z § 3.2, następane twierdzenie mówi, że cykle nie mają wpływu na relację osiągalności.

### Twierdzenie 1

Jeśli  $u$  i  $v$  są różnymi wierzchołkami grafu  $G$  i jeśli istnieje w grafie  $G$  droga z  $u$  do  $v$ , to istnieje prosta droga acykliczna z  $u$  do  $v$ .

**Dowód.** Spośród wszystkich dróg z  $u$  do  $v$  w grafie  $G$  wybierzmy drogę o najmniejszej długości, powiedzmy o ciągu wierzchołków  $x_1 \dots x_{n+1}$ , gdzie  $x_1 = u$  i  $x_{n+1} = v$ . Ze stwierdzenia 2 wynika, że ta droga jest prosta i acykliczna, przy założeniu, że wierzchołki  $x_1, \dots, x_{n+1}$  są różne. Ale w przeciwnym przypadku mielibyśmy  $x_i = x_j$  dla pewnych  $i$  i  $j$  takich, że  $1 \leq i < j \leq n+1$ . Wtedy droga  $x_i x_{i+1} \dots x_j$  z  $x_i$  do  $x_j$  byłaby zamknięta (zob. rysunek 6.2), a droga  $x_1 \dots x_i x_{j+1} \dots x_{n+1}$ , otrzymana przez usunięcie fragmentu od  $x_i$  do  $x_j$ , nadal będzie prowadzić z  $u$  do  $v$ . Ponieważ droga  $x_1 \dots x_n x_{n+1}$  ma najmniejszą długość, więc ta krótsza droga nie może istnieć. Zatem wierzchołki są różne i najkrótsza droga jest prosta i acykliczna. ■



Rysunek 6.2

**Wniosek**

Jeśli  $e$  jest krawędzią w zamkniętej drodze prostej w grafie  $G$ , to  $e$  należy do jakiegoś cyklu.

**Dowód.** Jeśli  $e$  jest pętlą, to nie ma czego dowodzić, więc założymy, że krawędź  $e$  łączy różne wierzchołki  $u$  i  $v$ . Usuńmy krawędź  $e$  z grafu  $G$ . Ponieważ dana droga przechodząca przez  $u$  i  $v$  jest zamknięta, więc nawet po usunięciu  $e$  istnieje droga z  $u$  do  $v$ ; po prostu należy przejść dookoła resztę danej drogi. Na podstawie twierdzenia 1 istnieje prosta droga acykliczna z  $u$  do  $v$ , nie zawierająca krawędzi  $e$ . Połączenie końców takiej drogi krawędzią  $e$  utworzy cykl przechodzący przez  $u$  i  $v$ . ■

W innych sytuacjach, szczególnie w § 6.3, będziemy usuwać krawędź  $e$  z grafu  $G$ , by otrzymać nowy graf  $G \setminus \{e\}$ . Graf  $G \setminus \{e\}$  jest podgrafem grafu  $G$ , w którym  $V(G \setminus \{e\}) = V(G)$  oraz  $E(G \setminus \{e\}) = E(G) \setminus \{e\}$ .

Następujący fakt będzie potrzebny przy badaniu drzew w § 6.3.

**Twierdzenie 2**

Jeśli  $u$  i  $v$  są różnymi wierzchołkami grafu acyklicznego  $G$ , to istnieje co najwyżej jedna droga prosta w  $G$  prowadząca z  $u$  do  $v$ .

**Dowód.** Załóżmy, że twierdzenie jest fałszywe i spośród par wierzchołków połączonych dwiema różnymi drogami prostymi wybierzmy parę  $(u, v)$  mającą drogę o najmniejszej długości, łączącą te wierzchołki.

Weźmy dwie drogi proste z  $u$  do  $v$ , z których jedna jest możliwie najkrótsza. Jeśli te dwie drogi nie mają wspólnych wierzchołków poza  $u$  i  $v$ , to przejście z  $u$  do  $v$  wzdłuż jednej drogi i powrót z  $v$  do  $u$  wzdłuż drugiej drogi da cykl, co jest sprzeczne z założeniem, że graf  $G$  jest acykliczny. Zatem obie drogi muszą przechodzić przez co najmniej jeden inny wierzchołek, powiedzmy  $w$ . Wtedy drogi z  $u$  do  $v$  tworzą albo dwie różne drogi proste z  $u$  do  $w$ , albo dwie różne drogi z  $w$  do  $v$ . Ale  $w$  leży bliżej wierzchołków  $u$  i  $v$ , niż one względem siebie, co jest sprzeczne z wyborem pary  $(u, v)$ . ■

**PRZYKŁAD 2**

Weźmy graf pokazany na rysunku 6.1(c). Droga  $xwyzx$ , utworzona z jednej drogi prowadzącej z  $x$  do  $w$  oraz drugiej prowadzącej z powrotem do  $x$ , jest cyklem. Jest też cyklem droga  $wuvw$  prowadząca z  $w$  do  $u$ , a potem z powrotem do  $w$  inną drogą.

Drogi proste  $uwyxwv$  i  $uwyzwv$  prowadzą z  $u$  do  $v$ . Cykl  $yxwzy$  jest utworzony z fragmentów tych dróg, jednego z  $y$  do  $w$  i drugiego prowadzącego z powrotem od  $w$  do  $y$ . ■

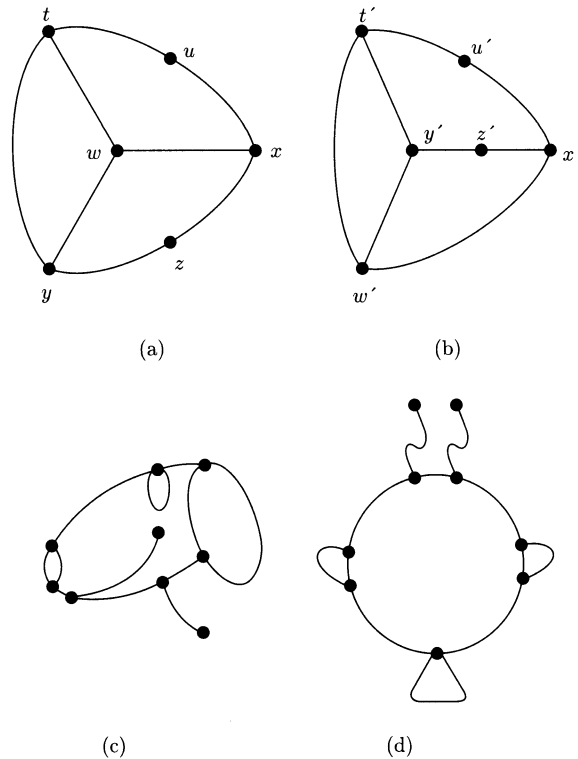
Często zdarza się, że dwa grafy są „właściwie takie same”, pomimo że różnią się nazwami krawędzi i wierzchołków. Zdania ogólne, które można wypowiedzieć o jednym z tych grafów, są również prawdziwe o drugim. Aby te idee uczynić matematycznie ścisłymi, wprowadza się pojęcie izomorfizmu. Mówiąc ogólnie, dwa zbiory wyposażone w pewne struktury matematyczne nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje przekształcenie wzajemnie jednoznaczne między tymi zbiorami, zachowujące te struktury (czyli zgodne z nimi). Przypomnijmy, że jeśli  $G$  i  $H$  są grafami bez krawędzi wielokrotnych, to przyjmujemy, że krawędziami są jedno- i dwuelementowe podzbiory zbiorów wierzchołków. **Izomorfizmem** grafu  $G$  na graf  $H$  nazywamy przekształcenie wzajemnie jednoznaczne  $\alpha : V(G) \rightarrow V(H)$  takie, że  $\{u, v\}$  jest krawędzią grafu  $G$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{\alpha(u), \alpha(v)\}$  jest krawędzią w grafie  $H$ . Dwa grafy  $G$  i  $H$  są **izomorficzne**, co zapisujemy  $G \simeq H$ , jeśli istnieje izomorfizm  $\alpha$  z jednego grafu na drugi; wtedy przekształcenie odwrotne  $\alpha^{-1}$  jest również izomorfizmem.

W przypadku grafów mających krawędzie wielokrotne sytuacja jest bardziej skomplikowana. Wymagamy wtedy dwóch przekształceń wzajemnie jednoznacznych  $\alpha : V(G) \rightarrow V(H)$  i  $\beta : E(G) \rightarrow E(H)$  takich, że krawędź  $e$  ze zbioru  $E(G)$  łączy wierzchołki  $u$  i  $v$  ze zbioru  $V(G)$  wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadająca jej krawędź  $\beta(e)$  łączy wierzchołki  $\alpha(u)$  i  $\alpha(v)$ . Zatem dwa grafy są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam rysunek, z wyjątkiem oznaczeń krawędzi i wierzchołków. Ta obserwacja przydaje się głównie jako sposób sprawdzania, czy dane przekształcenie jest izomorfizmem, polegający na rysowaniu odpowiadających sobie rysunków obu grafów.

### PRZYKŁAD 3

Przekształcenie  $\alpha$  takie, że  $\alpha(t) = t'$ ,  $\alpha(u) = u'$ ,  $\dots$ ,  $\alpha(z) = z'$  jest izomorfizmem grafów przedstawionych na rysunkach 6.3(a) i 6.3(b). Grafy pokazane na rysunkach 6.3(c) i 6.3(d) są również izomorficzne między sobą, ale nie są izomorficzne z grafami na rysunkach 6.3(a) i (b). ■

Aby rozróżnić grafy przedstawione na rysunkach 6.3(a) i 6.3(c), możemy po prostu policzyć wierzchołki. Grafy izomorficzne mają tyle samo wierzchołków i tyle samo krawędzi. Te dwie liczby są przykładami **niezmienników izomorfizmu** dla gra-



Rysunek 6.3

fów. Innymi przykładami niezmienników są: liczba pętli i liczba dróg prostych danej długości.

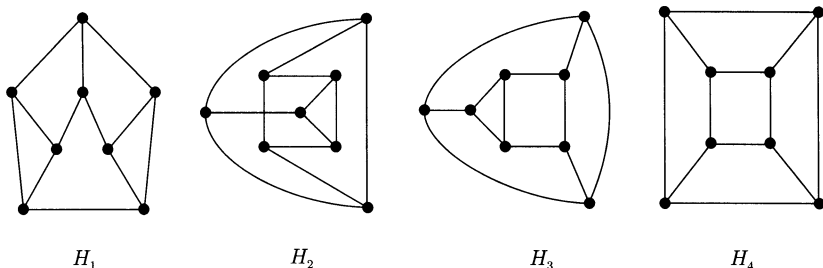
Często przydaje się zliczenie krawędzi schodzących się w konkretnym wierzchołku. Aby otrzymać właściwą liczbę, musimy odróżnić pętle od krawędzi mających dwa różne końce. Definiujemy **stopień wierzchołka**  $v$ , oznaczany symbolem  $\deg(v)$ , jako liczbę dwuwierzchołkowych krawędzi z  $v$  jako jednym z wierzchołków, plus podwojona liczba pętli o wierzchołku  $v$ . Liczba wierzchołków stopnia  $k$  w grafie  $G$ , oznaczana symbolem  $D_k(G)$ , jest niezmiennikiem izomorfizmu. Niezmiennikiem jest również **ciąg liczb wierzchołków kolejnych stopni**  $(D_0(G), D_1(G), D_2(G), \dots)$ .

**PRZYKŁAD 4**

(a) Każdy z grafów pokazanych na rysunkach 6.3(a) i 6.3(b) ma ciąg liczb wierzchołków kolejnych stopni  $(0, 0, 2, 4, 0, 0, \dots)$ . Grafy na rysunkach 6.3(c) i 6.3(d) mają ciąg liczb wierzchołków kolejnych stopni  $(0, 2, 0, 6, 1, 0, 0, \dots)$ .

(b) Wszystkie cztery grafy na rysunku 6.4 mają 8 wierzchołków stopnia 3 i nie mają żadnych innych wierzchołków. Okazuje

się, że  $H_1 \simeq H_2 \simeq H_3$ , ale żaden z tych grafów nie jest izomorficzny z grafem  $H_4$ . To, że dwa grafy mają ten sam ciąg liczb wierzchołków kolejnych stopni, nie gwarantuje, że są one izomorficzne. ■

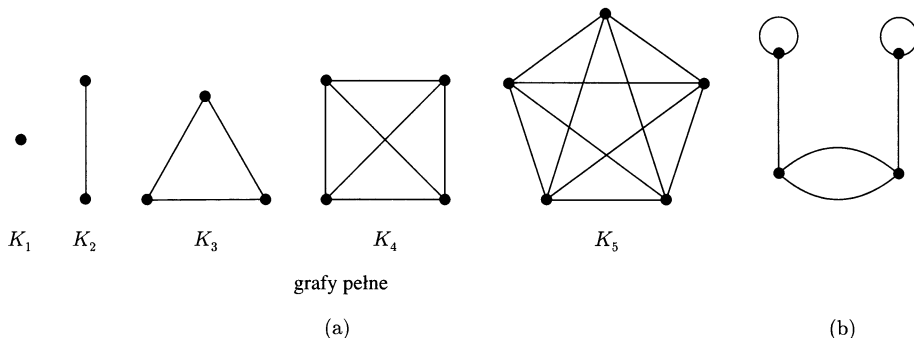


Rysunek 6.4

Grafy, w których wszystkie wierzchołki mają ten sam stopień, na przykład takie jak grafy przedstawione na rysunku 6.4, nazywamy **grafami regularnymi**. Jak pokazuje ten przykład, grafy regularne o tej samej liczbie wierzchołków nie muszą być izomorficzne. Grafy nie mające pętli czy krawędzi wielokrotnych i takie, w których każdy wierzchołek jest połączony krawędzią z każdym innym, nazywamy **grafami pełnymi**. Graf pełny o  $n$  wierzchołkach ma wszystkie wierzchołki stopnia  $n - 1$ , więc taki graf jest grafem regularnym. Wszystkie grafy pełne o  $n$  wierzchołkach są ze sobą izomorficzne, a więc każdy z nich oznaczamy symbolem  $K_n$ .

**PRZYKŁAD 5**

Rysunek 6.5(a) pokazuje pięć pierwszych grafów pełnych. Graf na rysunku 6.5(b) ma cztery wierzchołki, z których każdy jest stopnia 3, ale nie jest on grafem pełnym. ■



Rysunek 6.5



Graf pełny  $K_n$  zawiera podgrafy izomorficzne z grafami  $K_m$  dla  $m = 1, 2, \dots, n$ . Taki podgraf można otrzymać, wybierając dowolnych  $m$  spośród  $n$  wierzchołków i biorąc wszystkie krawędzie grafu  $K_n$ , łączące te wierzchołki. Zatem graf  $K_5$  zawiera  $\binom{5}{2} = 10$  podgrafów izomorficznych z  $K_2$ ,  $\binom{5}{3} = 10$  podgrafów izomorficznych z  $K_3$  (tzn. trójkątów) i  $\binom{5}{4} = 5$  podgrafów izomorficznych z  $K_4$ . W rzeczywistości, każdy graf mający  $n$  lub mniej wierzchołków i nie mający pętli i krawędzi wielokrotnych jest izomorficzny z podgrafem grafu  $K_n$ .

Grafy pełne są w dużym stopniu symetryczne. Każda permutacja  $\alpha$  wierzchołków grafu pełnego jest izomorfizmem tego grafu na ten sam graf, ponieważ zarówno  $\{u, v\}$ , jak i  $\{\alpha(u), \alpha(v)\}$  są krawędziami, gdy tylko  $u \neq v$ .

Następne twierdzenie pokazuje zależność między stopniami wierzchołków i liczbą krawędzi grafu.

### Twierdzenie 3

(a) Suma stopni wierzchołków grafu jest dwa razy większa od liczby krawędzi. To znaczy

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

(b)

$$D_1(G) + 2D_2(G) + 3D_3(G) + 4D_4(G) + \dots = 2 \cdot |E(G)|.$$

**Dowód.** (a) Każda krawędź, niezależnie od tego, czy jest pętlą, czy nie, dodaje 2 do sumy stopni.

(b) W całkowitej sumie stopni udział  $D_k(G)$  wierzchołków stopnia  $k$  wynosi  $k \cdot D_k(G)$ . ■

### PRZYKŁAD 6

(a) Graf przedstawiony na rysunku 6.3(c) (i graf z nim izomorficzny przedstawiony na rysunku 6.3(d)) ma wierzchołki stopni 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3 oraz 4 i ma 12 krawędzi. Ciągami liczb wierzchołków kolejnych stopni jest  $(0, 2, 0, 6, 1, 0, 0, 0, \dots)$ . Oczywiście

$$1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 = 2 \cdot 12 = 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 1.$$

(b) Grafy przedstawione na rysunku 6.4 mają 8 wierzchołków stopnia 3 i 12 krawędzi. Ich ciągami liczb wierzchołków kolejnych stopni jest  $(0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, \dots)$  oraz równość

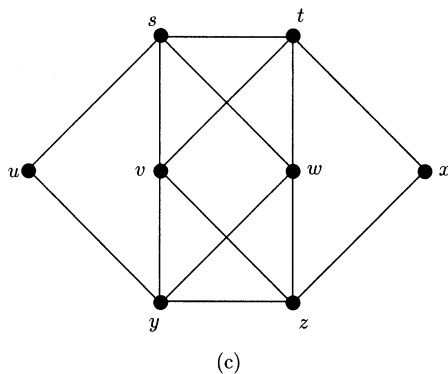
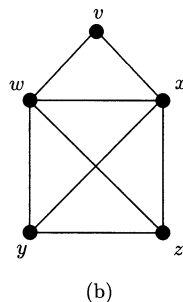
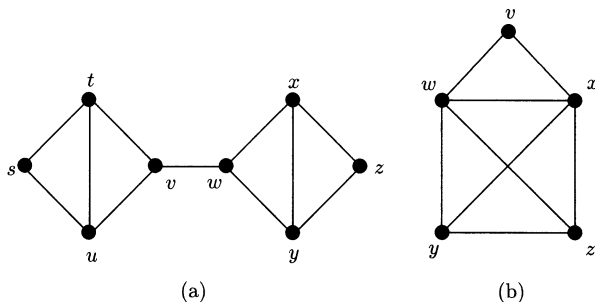
$$2 \cdot 12 = 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 8$$

potwierdza prawdziwość twierdzenia 3(b) w tym przypadku.

(c) Graf pełny  $K_n$  ma  $n$  wierzchołków, każdy z nich jest stopnia  $n - 1$  i graf ma  $n(n - 1)/2$  krawędzi. ■

### ĆWICZENIA DO § 6.1

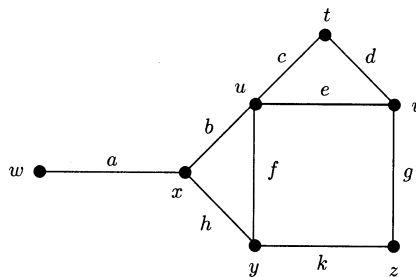
1. Dla grafu przedstawionego na rysunku 6.6(a) podaj ciąg wierzchołków najkrótszej drogi łączącej następujące pary wierzchołków i podaj jej długość:  
 (a)  $s$  i  $v$ , (b)  $s$  i  $z$ , (c)  $u$  i  $y$ , (d)  $v$  i  $w$ .



Rysunek 6.6

2. Dla każdej pary wierzchołków z ćwiczenia 1 podaj ciąg wierzchołków najdłuższej łączącej je drogi, w której krawędzie się nie powtarzają. Czy istnieje najdłuższa łącząca je droga, jeśli krawędzie mogą się powtarzać?
3. Czy następujące zdania są prawdziwe czy fałszywe? „Prawdziwe” oznacza „prawdziwe we wszystkich rozważanych przypadkach”. Weźmy pod uwagę dowolny graf.
- (a) Jeśli istnieje krawędź z wierzchołka  $u$  do wierzchołka  $v$ , to istnieje krawędź z  $v$  do  $u$ .

- (b) Jeśli istnieje krawędź z wierzchołka  $u$  do wierzchołka  $v$  i istnieje krawędź z wierzchołka  $v$  do wierzchołka  $w$ , to istnieje krawędź z  $u$  do  $w$ .
4. Powtórz ćwiczenie 3, zastępując wszędzie słowo „krawędź” słowem „droga”.
  5. Powtórz ćwiczenie 3, zastępując wszędzie słowo „krawędź” słowem „droga o długości parzystej”.
  6. (a) Sprawdź twierdzenie 3(a) dla każdego z grafów przedstawionych na rysunku 6.6, obliczając
    - (i) sumę stopni wszystkich wierzchołków,
    - (ii) liczbę krawędzi.
 (b) Czy graf może mieć nieparzystą liczbę wierzchołków nieparzystego stopnia?
  7. Podaj przykład grafu z wierzchołkami  $x, y$  i  $z$ , mającego wszystkie trzy podane własności:
    - (i) istnieje cykl przechodzący przez wierzchołki  $x$  i  $y$ ;
    - (ii) istnieje cykl przechodzący przez wierzchołki  $y$  i  $z$ ;
    - (iii) nie ma cykli przechodzących przez  $x$  i  $z$ .
  8. Przypuśćmy, że cykl zawiera pętlę. Jaka jest jej długość? Czy cykl może zawierać dwie pętle?
  9. (a) Podaj tablicę wartości funkcji  $\gamma$  dla grafu  $G$  przedstawionego na rysunku 6.7.
 (b) Wypisz krawędzie tego grafu, traktowane jako podzbiory zbioru  $V(G)$ . Na przykład  $a = \{w, x\}$ .

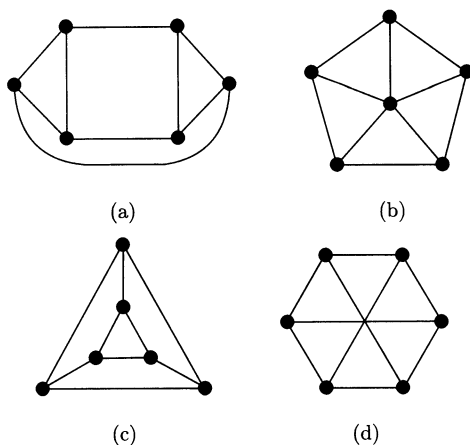


Rysunek 6.7

10. Narysuj rysunek grafu  $G$ , gdzie  $V(G) = \{x, y, z, w\}$ ,  $E(G) = \{a, b, c, d, f, g, h\}$  oraz funkcja  $\gamma$  jest dana w postaci tablicy:

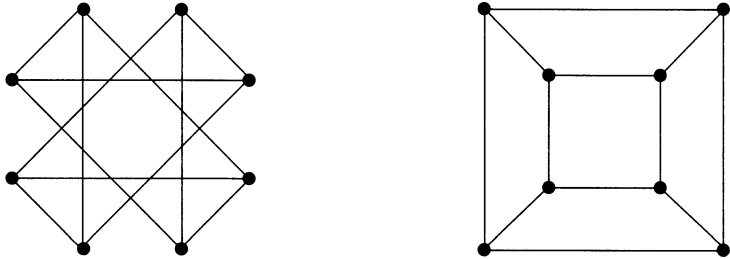
$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$	$g$	$h$
$\gamma(e)$	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$	$\{w, x\}$	$\{w, y\}$	$\{y, z\}$	$\{y, z\}$	$\{w, z\}$

11. W każdej części tego ćwiczenia podane są dwie drogi, które łączą parę punktów w grafie przedstawionym na rysunku 6.7. Użyj idei przedstawionej w dowodzie twierdzenia 2 do skonstruowania cykli z ciągów krawędzi w tych dwóch drogach.
- (a)  $eba$  oraz  $gkha$ ,  
 (b)  $abcdgk$  oraz  $ah$ ,  
 (c)  $eba$  oraz  $dcfha$ .
12. (a) Zrób rysunki wszystkich czternastu grafów o trzech wierzchołkach i trzech krawędziach. „Wszystkie” oznacza tutaj, że każdy taki graf jest izomorficzny z jednym z tych czternastu grafów, a żadne dwa z tych czternastu nie są izomorficzne ze sobą.  
 (b) Zrób rysunki wszystkich grafów o czterech wierzchołkach i czterech krawędziach, które nie mają pętli i krawędzi wielokrotnych.  
 (c) Wypisz cztery grafy z punktów (a) i (b), które są regularne.
13. (a) Zrób rysunki wszystkich pięciu grafów regularnych o czterech wierzchołkach, z których każdy ma stopień 2.  
 (b) Zrób rysunki wszystkich grafów regularnych o czterech wierzchołkach, z których każdy ma stopień 3 i nie ma pętli i krawędzi wielokrotnych.  
 (c) Zrób rysunki wszystkich grafów regularnych o pięciu wierzchołkach, z których każdy ma stopień 3.
14. Przypuśćmy, że graf  $H$  jest izomorficzny z grafem  $G$  przedstawionym na rysunku 6.7.
- (a) Ile wierzchołków stopnia 1 ma graf  $H$ ?  
 (b) Podaj ciąg liczb wierzchołków kolejnych stopni grafu  $H$ .  
 (c) Ile jest różnych izomorfizmów z grafu  $G$  na  $G$ ? Odpowiedź uzasadnij.  
 (d) Ile jest różnych izomorfizmów z grafu  $G$  na graf  $H$ ?



Rysunek 6.8

15. Które pary grafów z przedstawionych na rysunku 6.8 są izomorficzne, jeśli w ogóle takie istnieją? Uzasadnij swoją odpowiedź opisując izomorfizm lub wyjaśniając, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.
16. Opisz izomorfizm między grafami pokazanymi na rysunku 6.9.



Rysunek 6.9

17. Weźmy graf pełny  $K_8$  o wierzchołkach  $v_1, v_2, \dots, v_8$ .
- Ile podgrafów grafu  $K_8$  jest izomorficznych z grafem  $K_5$ ?
  - Ile istnieje dróg prostych, prowadzących z wierzchołka  $v_1$  do wierzchołka  $v_2$ , mających trzy lub mniej krawędzi?
  - Ile w sumie dróg prostych o trzech lub mniej krawędziach istnieje w grafie  $K_8$ ?
18. (a) Graf o 21 krawędziach ma 7 wierzchołków stopnia 1, 3 wierzchołki stopnia 2, 7 wierzchołków stopnia 3, a pozostałe wierzchołki mają stopień 4. Ile ma on wierzchołków?
- (b) Jaka byłaby odpowiedź w ćwiczeniu (a), gdyby graf miał też 6 wierzchołków stopnia 0?
19. Które z następujących ciągów są ciągami liczb wierzchołków kolejnych stopni grafów? W każdym przypadku albo narysuj graf o danym ciągu liczb wierzchołków kolejnych stopni tego grafu, albo wyjaśnij, dlaczego taki graf nie istnieje.
- $(1, 1, 0, 3, 1, 0, 0, \dots)$
  - $(4, 1, 0, 3, 1, 0, 0, \dots)$
  - $(0, 1, 0, 2, 1, 0, 0, \dots)$
  - $(0, 0, 2, 2, 1, 0, 0, \dots)$
  - $(0, 0, 1, 2, 1, 0, 0, \dots)$
  - $(0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, \dots)$
  - $(0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, \dots)$
  - $(0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, \dots)$
20. Pokaż, że droga w grafie  $G$  jest cyklem wtedy i tylko wtedy, gdy jest możliwe przypisanie zwrotów krawędziom grafu  $G$  tak, by droga ta była cyklem (skierowanym) w otrzymanym grafie skierowanym.
21. Pokaż, że każdy skończony graf, w którym każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 2, zawiera cykl.

22. Pokaż, że każdy graf o  $n$  wierzchołkach i co najmniej  $n$  krawędziach zawiera cykl. *Wskazówka:* Zastosuj indukcję względem  $n$  i skorzystaj z ćwiczenia 21.

23. Pokaż, że

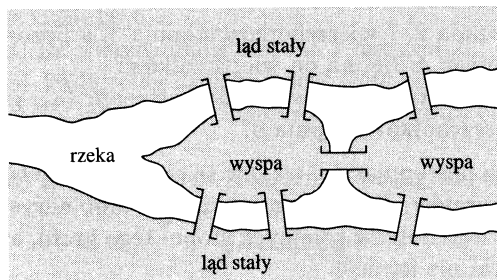
$$2|E(G)| - |V(G)| = -D_0(G) + D_2(G) + 2D_3(G) + \dots + (k-1)D_k(G) + \dots$$

24. (a) Niech  $\mathcal{S}$  będzie zbiorem grafów. Pokaż, że izomorfizm  $\simeq$  jest relacją równoważności w zbiorze  $\mathcal{S}$ .

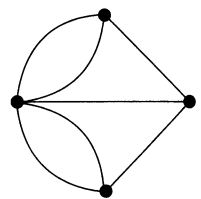
(b) Ile klas równoważności istnieje w zbiorze  $\mathcal{S}$  składającym się z czterech grafów przedstawionych na rysunku 6.4?

## § 6.2. Zagadnienia związane z poruszaniem się po krawędziach

Jednym z najstarszych problemów dotyczących grafów jest problem mostów królewieckich. Czy można przejść się po mieście pokazanym na rysunku 6.10(a), przechodząc przez każdy most



(a)



(b)

graf mostów królewieckich

Rysunek 6.10

dokładnie jeden raz i wrócić do domu? Szwajcarski matematyk Leonhard Euler rozwiązał ten problem w 1736 roku. Zbudował on graf pokazany na rysunku 6.10(b) zastępując obszary lądu wierzchołkami, a mosty łączącymi je krawędziami. Powstało wtedy pytanie: czy istnieje droga zamknięta w tym grafie przechodząca przez każdą krawędź dokładnie jeden raz? Taką drogę nazywamy **cyklem Eulera** w grafie. Ogólniej, droga prosta zawierająca wszystkie krawędzie grafu  $G$  jest nazywana **drogą Eulera** w  $G$ .

Euler pokazał, że nie ma cyklu Eulera dla grafu mostów królewieckich, w którym wszystkie wierzchołki mają stopień nieparzysty, dowodząc następującego prostego faktu.

**Twierdzenie 1**

Graf, który ma cykl Eulera, musi mieć wszystkie wierzchołki stopnia parzystego.

**Dowód.** Wychodząc z dowolnego wierzchołka na cyklu Eulera, poruszamy się po tym cyklu, przechodząc od wierzchołka do wierzchołka i wycierając każdą krawędź, po której przeszliśmy. Kiedy przechodzimy przez wierzchołek, wycieramy jedną krawędź dochodzącą do tego wierzchołka i jedną wychodzącą z niego lub wycieramy pętlę. W każdym przypadku to wycieranie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie każda krawędź zostanie usunięta i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty. ■

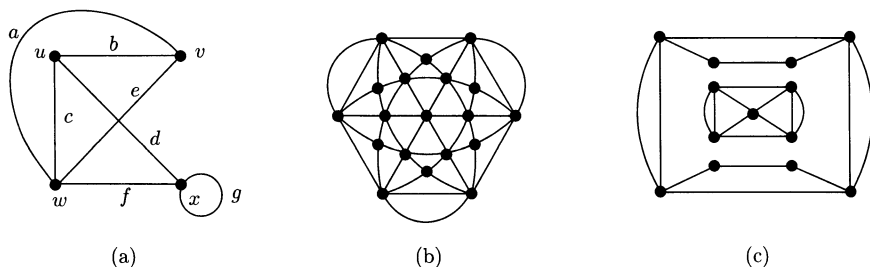
**Wniosek**

Graf  $G$  mający drogę Eulera ma albo dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, albo nie ma w ogóle wierzchołków stopnia nieparzystego.

**Dowód.** Przypuśćmy, że graf  $G$  ma drogę Eulera zaczynającą się w wierzchołku  $u$  i kończącą się w wierzchołku  $v$ . Jeśli  $u = v$ , to droga jest zamknięta i twierdzenie 1 mówi, że wszystkie wierzchołki mają stopień parzysty. Jeśli  $u \neq v$ , to tworzymy nową krawędź  $e$  łączącą  $u$  i  $v$ . Nowy graf  $G \cup \{e\}$  ma cykl Eulera składający się z drogi Eulera w  $G$  i krawędzi  $e$ , więc wszystkie wierzchołki grafu  $G \cup \{e\}$  mają stopień parzysty. Usuwamy krawędź  $e$ . Wtedy  $u$  i  $v$  są jedynymi wierzchołkami grafu  $G = (G \cup \{e\}) \setminus \{e\}$  stopnia nieparzystego. ■

**PRZYKŁAD 1**

Graf pokazany na rysunku 6.11(a) nie ma cyklu Eulera, ponieważ  $u$  i  $v$  mają stopień nieparzysty, ale droga  $bacdgfe$  jest drogą Eulera. Graf przedstawiony na rysunku 6.11(b) ma wszystkie wierzchołki stopnia parzystego i rzeczywiście ma cykl Eulera. Graf przedstawiony na rysunku 6.11(c) ma wszystkie wierzchołki stopnia parzystego, ale nie ma cyklu Eulera z oczywistego powodu, ponieważ składa się on z dwóch podgrafów nie połączonych ze sobą. Każdy z tych podgrafów, jednakże, ma swój własny cykl Eulera. ■



Rysunek 6.11

Twierdzenie 1 mówi, że warunek parzystości stopni wierzchołków jest warunkiem koniecznym istnienia cyklu Eulera. Głównym osiągnięciem Eulera w rozwiązaniu tego problemu było udowodnienie, że z pominięciem oczywistych trudności, na które natknęliśmy się w przykładzie z rysunku 6.11(c), ten warunek jest również warunkiem wystarczającym istnienia cyklu Eulera.

Wprowadzimy terminologię do opisu tych wyjątkowych przypadków. Graf jest **spójny**, jeśli każda para różnych wierzchołków jest połączona drogą w tym grafie. Grafy na rysunkach 6.11(a) i 6.11(b) są spójne, a graf na rysunku 6.11(c) nie jest spójny. Spójny podgraf grafu  $G$ , który nie jest zawarty w większym spójnym podgrafie grafu  $G$ , nazywamy **składową grafu**  $G$ . Składowa zawierająca dany wierzchołek  $v$ , wraz z  $v$  zawiera wszystkie wierzchołki i krawędzie dróg zaczynających się w wierzchołku  $v$ .

**PRZYKŁAD 2**

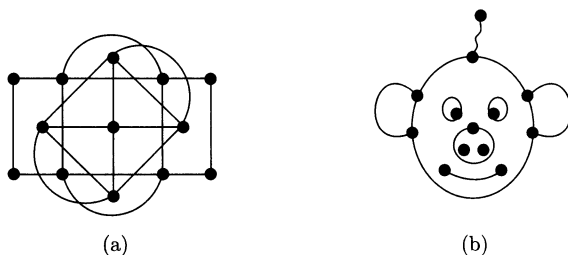
(a) Grafy przedstawione na rysunkach 6.11(a) i 6.11(b) są spójne. W takich przypadkach graf ma jedną składową, mianowicie cały graf.

(b) Graf przedstawiony na rysunku 6.11(c) ma dwie składowe, jedną narysowaną na zewnątrz, a drugą wewnątrz. Inne przedstawienie tego grafu jest pokazane na rysunku 6.12(a). Na tym rysunku nie ma składowej „wewnętrznej”, ale oczywiście nadal są dwie składowe.

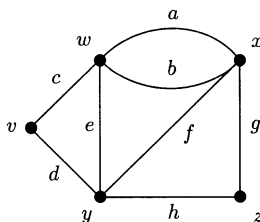
Graf przedstawiony na rysunku 6.12(b) ma siedem składowych, z których dwie są izolowanymi wierzchołkami. ■

Twierdzenie Eulera mówi, że skończony graf spójny, w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty, ma cykl Eulera. Aby naprawdę zrozumieć to twierdzenie, powinniśmy umieć znaleźć dowód lub opracować algorytm czy procedurę, która zawsze w wyniku dawałaby cykl Eulera. W rzeczywistości te dwa podejścia są ściśle ze sobą związane. Pełne zrozumienie dowodu czę-





Rysunek 6.12



Rysunek 6.13

sto prowadzi do skonstruowania algorytmu, a za każdym algorytmem stoi dowód. A oto proste wyjaśnienie twierdzenia Eulera, które zilustrujemy rysunkiem 6.13. Zaczniemy od dowolnego wierzchołka, powiedzmy  $w$  i dowolnej krawędzi wychodzącej z niego, powiedzmy  $a$ . Jej drugi koniec, w tym przypadku  $x$ , ma stopień parzysty i był użyty nieparzystą liczbę razy (raz), a więc istnieje nie wykorzystana krawędź wychodząca z  $x$ . Wybierzmy taką krawędź, na przykład  $b$ . Postępujemy dalej w ten sposób. Ten proces nie zakończy się dotąd, aż nie osiągniemy początkowego wierzchołka  $w$ , gdyż za każdym razem, gdy dochodzimy do innego wierzchołka, wykorzystujemy tylko nieparzystą liczbę krawędzi wychodzących z niego. W naszym przykładzie ten algorytm mógł zacząć od wybrania krawędzi  $abe$  i wierzchołków  $wxwy$ . W wierzchołku  $y$  możemy wybrać jedną z trzech krawędzi:  $d$ ,  $f$  lub  $h$ . Jeśli wybierzemy  $f$ , reszta tego procesu jest wyznaczona jednoznacznie. Otrzymujemy cykl Eulera  $abefghdc$  wraz z ciągiem wierzchołków  $wxwyxzyvw$ .

Proste, prawda? Tak, zbyt proste. Co by się stało, gdybyśmy po dojściu pierwszy raz do wierzchołka  $y$  wybrali krawędź  $d$ ? Po przejściu krawędzi  $c$  znaleźlibyśmy się w ślepych zaułku w wierzchołku  $w$  i nasza droga  $abedc$  nie przeszłaby przez krawędzie  $f$ ,  $g$  i  $h$ . Nasze wyjaśnienie i nasz algorytm musiały być zbyt proste.

W naszym przykładzie jest jasne, że powinniśmy unikać krawędzi  $d$ , gdy po raz pierwszy doszliśmy do wierzchołka  $y$ , ale dlaczego? Jaka ogólna zasada mogłaby nas przestrzec przed tym wyborem? Pomyśl o tym. Powrócimy do tej sprawy po podaniu niekonstruktynego dowodu twierdzenia Eulera.

**Twierdzenie 2**  
(twierdzenie  
Eulera)

Skończony graf spójny, w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty, ma cykl Eulera.

**Dowód.** Załóżmy, że  $G$  jest skończonym grafem spójnym, w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty. Jeśli graf  $G$  ma tylko jeden wierzchołek, to twierdzenie jest trywialne, a więc załóżmy, że  $|V(G)| \geq 2$ . Ponieważ graf  $G$  jest spójny, więc każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 1, a zatem co najmniej 2, gdyż wszystkie stopnie są parzyste.

Niech  $v_1, v_2, \dots, v_n$  będzie ciągiem wierzchołków najdłuższej możliwej drogi, w której wszystkie krawędzie są różne. Ponieważ zbiór  $E(G)$  jest skończony, taka droga musi istnieć. Twierdzimy, że  $v_n = v_1$ . Aby tego dowieść, rozważmy graf  $G'$  otrzymany przez usunięcie krawędzi tej drogi i zobaczmy, w jaki sposób zmieniają się stopnie wierzchołków. Wierzchołek  $v_n$  może znajdować się lub nie wśród wierzchołków  $v_2, \dots, v_{n-1}$ . Jeśli znajduje się wśród nich, to każde takie wystąpienie zmniejsza stopień  $v_n$  w grafie  $G'$  o 2: o 1 przez usunięcie krawędzi wchodzącej do  $v_n$  i o 1 przez usunięcie krawędzi wychodzącej. Ponieważ usunięcie ostatniej krawędzi na tej drodze zmniejsza stopień  $v_n$  o 1, więc gdyby wierzchołek  $v_n$  był różny od  $v_1$ , jego stopień w  $G'$  byłby nieparzysty. W takim przypadku moglibyśmy dodać do naszej drogi nie wykorzystaną krawędź wychodzącą z wierzchołka  $v_n$  i otrzymalibyśmy drogę dłuższą, też składającą się z różnych krawędzi, co przeczy naszemu wyborowi najdłuższej drogi. Zatem  $v_n = v_1$ .

Następnie pokażemy, że nasza najdłuższa droga przechodzi przez każdy wierzchołek grafu  $G$ . Gdyby tak nie było, to ze spójności grafu wynikałoby, że istnieje droga od pewnego nie odwiedzonego wierzchołka do jakiegoś wierzchołka zbioru  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Pierwsza krawędź tej drogi należy do  $G'$ . Ostatnia krawędź  $e$  tej drogi, znajdująca się w  $G'$ , musi dochodzić do któregoś wierzchołka zbioru  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , powiedzmy do wierzchołka  $v_i$ . Jeśli przejdziemy teraz naszą najdłuższą drogę od wierzchołka  $v_i$  do  $v_i$ , a następnie dodamy krawędź  $e$ , otrzymamy dłuższą drogę o różnych krawędziach, co znów jest sprzeczne z naszym wyborem najdłuższej drogi.

Aby zakończyć dowód, pokażemy, że nasza najdłuższa droga przechodzi przez każdą krawędź grafu  $G$ , a więc jest cyklem Eulera. Tak naprawdę, jeśli  $e$  jest krawędzią, która została pominięta, któryś z wierzchołków  $v_i$  musi być jednym z jej końców (a nawet dwa takie  $v_i$ , chyba, że  $e$  jest pętlą). Tak jak w poprzednim akapicie, krawędź  $e$  może być dołączona do najdłuższej drogi i w ten sposób otrzymamy dłuższą drogę, a więc sprzeczność. ■

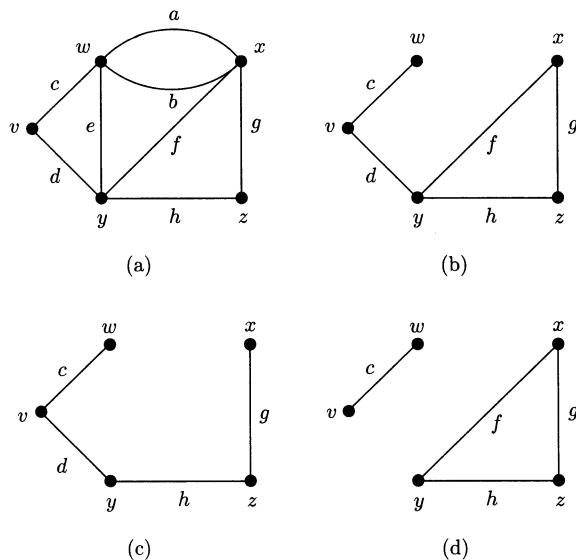
### Wniosek

Skończony graf spójny, mający dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, ma drogę Eulera.

**Dowód.** Przypuśćmy, że  $u$  i  $v$  są wierzchołkami stopni nieparzystych. Utwórzmy nową krawędź  $e$ , łączącą je. Wtedy graf  $G \cup \{e\}$  ma wszystkie wierzchołki stopni parzystych, a więc ma cykl Eulera na podstawie twierdzenia 2. Usuńmy znowu krawędź  $e$ . To, co pozostanie z cyklu Eulera, jest drogą Eulera w grafie  $G$ . ■

Powtarzając w zasadzie ten sam dowód, pokażemy w § 8.1, że analogiczne twierdzenie jest również prawdziwe dla grafów skierowanych. Twierdzenie to mówi nam, kiedy graf ma cykl Eulera, ale nie mówi, jak go znaleźć. Chcielibyśmy mieć algorytm, który tworzy cykl lub drogę Eulera, krawędź po krawędzi, zamiast niejasnej procedury, której użyliśmy do grafu z rysunku 6.13. Popatrzmy jeszcze raz na cykl Eulera, który znaleźliśmy na rysunku 6.13, powtórzonym na rysunku 6.14(a). W chwili, gdy wybieramy kolejną krawędź, usuwamy ją z grafu i rozważamy otrzymane w ten sposób podgrafy. Rozpoczęliśmy naszą drogę, wybierając krawędzie  $abe$ . Na rysunku 6.14(b) pokazany jest graf, z którego usunięto te krawędzie. W naszej pomyślanej próbie znalezienia cyklu Eulera wybraliśmy następnie krawędź  $f$  oraz zauważyliśmy, że gdybyśmy wybrali krawędź  $d$ , skazalibyśmy się na niepowodzenie. Na rysunku 6.14(c) widzimy ten graf po usunięciu również krawędzi  $f$ , a na rysunku 6.14(d) widzimy ten graf po usunięciu krawędzi  $d$  zamiast  $f$ . Widzimy różnicę: po usunięciu krawędzi  $d$  graf staje się niespójny, podczas gdy usunięcie krawędzi  $f$  nie powoduje tego. Na tym polega istota algorytmu, który działa poprawnie. W każdym wierzchołku algorytm Fleury'ego każe nam wybrać, jeśli to możliwe, taką krawędź, po usunięciu której graf pozostanie spójny. Jeśli nie jest to możliwe, to pozostaje dokładnie jedna krawędź. (Jest to nietrywialny fakt, który wymaga dowodu. Tu właśnie wkracza matematyka).

Wybieramy tę krawędź; wtedy z grafu usuwamy tę krawędź wraz z wierzchołkiem.



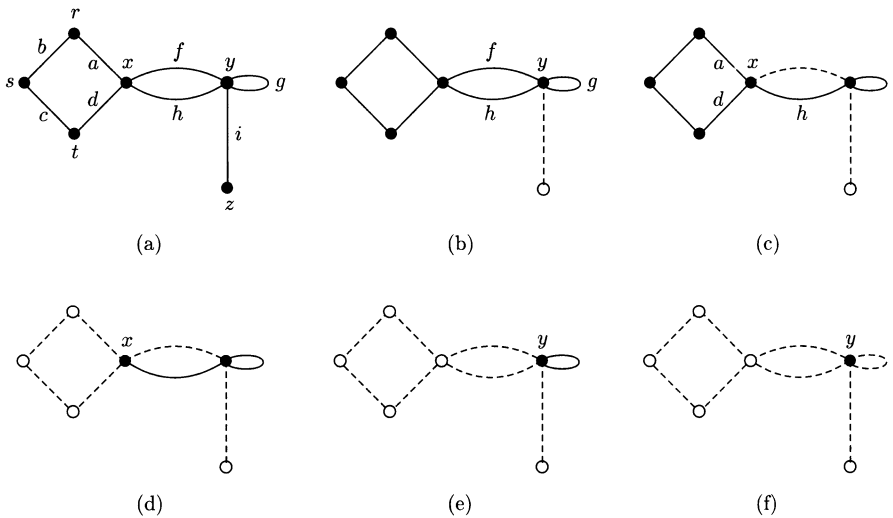
Rysunek 6.14

Sformalizujemy teraz ten algorytm. Kiedy algorytm zakończy działanie, ciąg  $ES$  będzie ciągiem krawędzi drogi lub cyklu Eulera, a  $VS$  będzie ciągiem wierzchołków tej drogi lub cyklu.

### Algorytm Fleury'ego

- Krok 1. Wybierz dowolny wierzchołek  $v$  nieparzystego stopnia, jeśli taki istnieje. W przeciwnym przypadku wybierz dowolny wierzchołek  $v$ . Niech  $VS = v$  i niech  $ES = \lambda$  (ciąg pusty).
- Krok 2. Jeśli z wierzchołka  $v$  nie wychodzi już żadna krawędź, zatrzymaj się.
- Krok 3. Jeśli pozostała dokładnie jedna krawędź wychodząca z wierzchołka  $v$ , powiedzmy krawędź  $e$  z wierzchołka  $v$  do  $w$ , to usuń  $e$  z  $E(G)$  oraz  $v$  z  $V(G)$  i przejdź do kroku 5.
- Krok 4. Jeśli została więcej niż jedna krawędź wychodząca z wierzchołka  $v$ , wybierz taką krawędź, powiedzmy  $e$  z  $v$  do  $w$ , po usunięciu której graf pozostanie spójny; następnie usuń  $e$  z  $E(G)$ .
- Krok 5. Dołącz  $w$  na końcu ciągu  $VS$ , dołącz  $e$  na końcu ciągu  $ES$ , zastąp  $v$  wierzchołkiem  $w$  i przejdź do kroku 2. ■

Zanim wyjaśnimy, dlaczego ten algorytm działa poprawnie, pokażemy przykład ilustrujący jego działanie.



Rysunek 6.15

**PRZYKŁAD 3**

Weźmy graf pokazany na rysunku 6.15(a). Ten graf nie ma cyklu Eulera, ale ma drogę Eulera łączącą wierzchołki  $z$  i  $y$  stopni nieparzystych. Wybieramy na początku wierzchołek  $z$ , tzn. w kroku 1 kładziemy  $v = z$ . Zatem  $VS = z$  i  $ES = \lambda$ . Jedyłą krawędzią wychodzącą z wierzchołka  $z$  jest  $i$ . Idziemy zatem do kroku 3, wybieramy  $e = i$  i  $w = y$ , usuwamy  $i$  z  $E(G)$ , usuwamy  $z$  z  $V(G)$  oraz przechodzimy do kroku 5. Wtedy  $VS = zy$  i  $ES = i$ . Nowy graf, po usunięciu  $i$  oraz  $z$  jest pokazany na rysunku 6.15(b). Przyjmujemy  $v = y$  i powracamy do kroku 2. Z wierzchołka  $v$  wychodzą trzy krawędzie, więc przechodzimy do kroku 4.

Teraz jako  $e$  możemy wybrać  $f$ ,  $g$  lub  $h$ . Wybierzmy w kroku 4 krawędź  $e = f$ . W kroku 5 otrzymamy  $VS = zyx$ ,  $ES = if$  oraz  $v = x$  i nowy graf  $G$  jest pokazany na rysunku 6.15(c). Powracamy do kroku 2. Znow z wierzchołka  $v$  wychodzą trzy krawędzie, więc przechodzimy do kroku 4.

Teraz krawędzią  $e$  może być  $a$  lub  $d$ , nie może natomiast być nią krawędź  $h$ , gdyż po usunięciu krawędzi  $h$  graf przestałby być spójny. Wybierzmy  $e = a$ ; w kroku 5 otrzymamy  $VS = zyxr$ ,  $ES = ifa$  i  $v = r$ .

Następne trzy ruchy są wymuszone. Każdy prowadzi do kroku 3 i usunięcia kolejnej krawędzi wraz z wierzchołkiem. Otrzymu-

jemy  $VS = zyxrstx$ ,  $ES = ifabcd$ ,  $v = x$  oraz graf przedstawiony na rysunku 6.15(d).

Ostatnie dwa ruchy są również wymuszone i prowadzą do grafów pokazanych na rysunkach 6.15(e) i 6.15(f). Ostatecznie ciągami wierzchołków i krawędzi są  $VS = zyxrstxy$  i  $ES = ifabcdhg$ . ■

Do dowodu tego, że algorytm Fleury'ego działa poprawnie, potrzebujemy następującego twierdzenia. Będzie ono również przydatne, gdy w § 6.3 będziemy omawiać drzewa.

### Twierdzenie 3

Niech  $e$  będzie krawędzią grafu spójnego  $G$ . Następujące warunki są równoważne:

- (a) graf  $G \setminus \{e\}$  jest spójny;
- (b)  $e$  jest krawędzią w pewnym cyklu w grafie  $G$ ;
- (c)  $e$  jest krawędzią w pewnej zamkniętej drodze prostej w grafie  $G$ .

**Dowód.** Zauważmy najpierw, że jeśli  $e$  jest pętlą, to graf  $G \setminus \{e\}$  jest spójny i krawędź  $e$  sama w sobie jest cyklem. Ponieważ cykle są zamkniętymi drogami prostymi, więc twierdzenie jest prawdziwe w tym przypadku, możemy zatem przyjąć, że krawędź  $e$  nie jest pętlą. Niech więc  $e$  łączy dwa różne wierzchołki  $u$  i  $v$ . Jeśli  $f$  jest inną krawędzią łączącą  $u$  i  $v$ , to oczywiście graf  $G \setminus \{e\}$  jest spójny i ciąg  $ef$  jest cyklem zawierającym  $e$ . A więc twierdzenie jest prawdziwe również w tym przypadku. Możemy zatem założyć, że  $e$  jest jedyną krawędzią łączącą  $u$  i  $v$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b). Przypuśćmy, że graf  $G \setminus \{e\}$  jest spójny. Z twierdzenia 1 w § 6.1 wynika, że istnieje prosta droga acykliczna  $x_1x_2 \dots x_m$  taka, że  $u = x_1$  i  $x_m = v$ . Ponieważ nie istnieje krawędź z  $u$  do  $v$  w grafie  $G \setminus \{e\}$ , więc  $x_2 \neq v$ , a więc  $m \geq 3$ . Jak wynika ze stwierdzenia 2 w § 6.1, wierzchołki  $x_1, x_2, \dots, x_m$  są różne, a więc  $x_1x_2 \dots x_mu$  jest cyklem w grafie  $G$ , zawierającym krawędź  $e$ .

(b)  $\Leftrightarrow$  (c). Oczywiście (b)  $\Rightarrow$  (c), gdyż cykle są zamkniętymi drogami prostymi, a (c)  $\Rightarrow$  (b) nawet, jeśli graf  $G$  nie jest spójny, na podstawie wniosku z twierdzenia 1 w § 6.1.

(b)  $\Rightarrow$  (a). Krawędź  $e$  jest jedną z dróg między  $u$  i  $v$ , podczas gdy reszta cyklu zawierającego  $e$  jest inną drogą. Nadal jest możliwe dostanie się z dowolnego wierzchołka grafu  $G$  do dowolnego innego wierzchołka nawet, jeśli droga prowadzi przez  $e$ . Po prostu zastępujemy krawędź  $e$ , jeśli trzeba, tą drugą drogą. ■

**Dowód poprawności algorytmu Fleury’ego.** Rozważamy skończony graf spójny, którego wszystkie wierzchołki mają stopień parzysty i pokazujemy, że wtedy algorytm Fleury’ego tworzy cykl Eulera. Modyfikacja dowodu, pokazująca, że w przypadku istnienia dwóch wierzchołków stopnia nieparzystego otrzymamy drogę Eulera, jest natychmiastowa.

Każdy przebieg pętli od kroku 2 do kroku 5 powoduje usunięcie jednej krawędzi z grafu  $G$  i dodanie jej do  $ES$  w taki sposób, że krawędzie w  $ES$  tworzą drogę. Ponieważ graf  $G$  ma na początku skończenie wiele krawędzi, algorytm wcześniej czy później musi zakończyć działanie — lub musi nastąpić błąd — i żadna krawędź nie wystąpi więcej niż jeden raz w drodze wyznaczonej przez  $ES$ . Musimy pokazać, że podczas wykonania algorytmu nie nastąpi błąd oraz że po zakończeniu działania droga  $ES$  zawiera wszystkie krawędzie grafu  $G$ .

Jedynym miejscem, w którym może pojawić się błąd, jest krok 4. Skąd wiemy, że istnieje krawędź, którą możemy usunąć tak, by graf pozostał spójny? Niech  $G'$  będzie aktualną wartością  $G$  i  $v'$  aktualną wartością  $v$  oraz przypuśćmy, że więcej niż jedna krawędź wychodzi z wierzchołka  $v'$  w grafie  $G'$ . Twierdzimy, że w rzeczywistości możemy wybrać dowolną krawędź wychodzącą z  $v'$ , z wyjątkiem co najwyżej jednej. Ponieważ krawędzie w  $ES$  tworzą drogę, mamy dwa przypadki do rozważenia: albo graf  $G'$  ma dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, z których jednym jest  $v'$ , a drugim wierzchołek  $v_0$  wybrany w kroku 1, albo  $v' = v_0$  i graf  $G'$  nie ma wierzchołków stopnia nieparzystego.

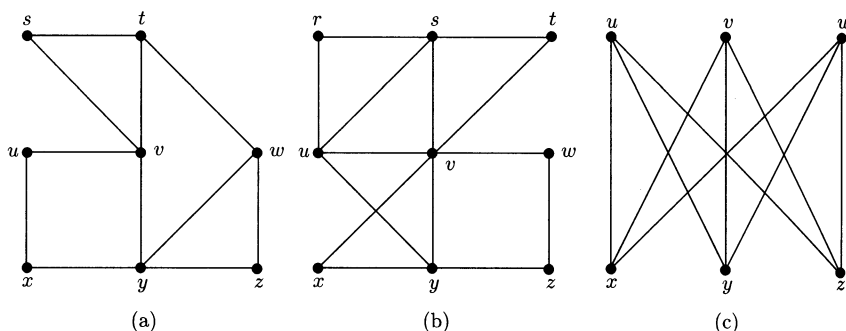
W pierwszym przypadku, z wniosku z twierdzenia 2 wynika, że graf  $G'$  ma drogę Eulera prowadzącą z  $v'$  do  $v_0$ . Za każdym razem, gdy ta droga powraca do  $v'$ , zatacza ona zamkniętą drogę prostą zawierającą dwie krawędzie wychodzące z  $v'$ , a więc z wyjątkiem być może krawędzi, którą ta droga opuszcza wierzchołek  $v'$  po raz ostatni, wszystkie krawędzie wychodzące z  $v'$  należą do pewnych zamkniętych dróg prostych w grafie  $G'$ . W drugim przypadku, z twierdzenia 2 wynika, że graf  $G'$  ma cykl Eulera i podobne rozumowanie pokazuje, że każda krawędź wychodząca z  $v'$  należy do pewnej zamkniętej drogi prostej w  $G'$ . Z twierdzenia 3 wynika, że po usunięciu krawędzi należącej do jakiejś zamkniętej drogi prostej graf  $G'$  nie przestanie być spójny. Ponieważ jest co najwyżej jedna zła krawędź wychodząca z  $v'$ , więc jeśli pierwsza krawędź, którą wybierzemy, nie będzie należała do zamkniętej drogi prostej, to każdy następny wybór krawędzi wychodzącej z  $v'$  na pewno będzie dobry.

Dlaczego na końcu nie pozostają żadne krawędzie? Na początku graf jest spójny. Kiedy wykonujemy krok 4, graf pozostaje spójny oraz kiedy wykonujemy krok 3, graf też pozostaje spójny, gdyż po usunięciu krawędzi  $e$  usuwamy również pozostawiony izolowany wierzchołek  $v$ . Zatem przez cały czas graf jest spójny. Kiedy musimy zakończyć działanie, gdyż nie ma już żadnej krawędzi wychodzącej z  $v'$ , w grafie  $G'$  nie może też być żadnych innych wierzchołków. Zatem graf  $G'$  nie ma również krawędzi i droga  $ES$  zawiera wszystkie krawędzie grafu  $G$ . ■

Większość operacji w algorytmie Fleury'ego, takich jak dodawanie lub usuwanie krawędzi, wymaga ustalonej ilości czasu, niezależnie od tego, ile wierzchołków ma graf  $G$ . Operacją, która trwa dłużej, jest testowanie spójności grafu  $G \setminus \{e\}$ . W paragrafie 8.4 pokażemy, że istnieje test spójności grafu oparty na algorytmie Dijkstry, działający w czasie  $O(|V(G)|^2)$ . Dowód poprawności algorytmu Fleury'ego pokazuje, że musimy sprawdzić tylko jedną krawędź w kroku 4. Ponieważ algorytm wykonuje jeden przebieg pętli od kroku 2 do kroku 5 dla każdej krawędzi grafu  $G$ , a następnie zatrzymuje się, więc całkowity czas działania algorytmu Fleury'ego wynosi  $O(|V(G)|^2 \cdot |E(G)|)$ .

## ĆWICZENIA DO § 6.2

1. Który z grafów przedstawionych na rysunku 6.16 ma cykle Eulera? Podaj ciąg wierzchołków w cyklu Eulera w każdym przypadku, w którym istnieje taki cykl.

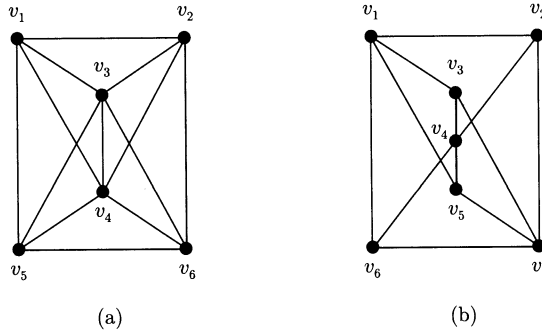


Rysunek 6.16

2. Wykorzystaj algorytm Fleury'ego do znalezienia cyklu Eulera w grafie przedstawionym na rysunku 6.16(b).



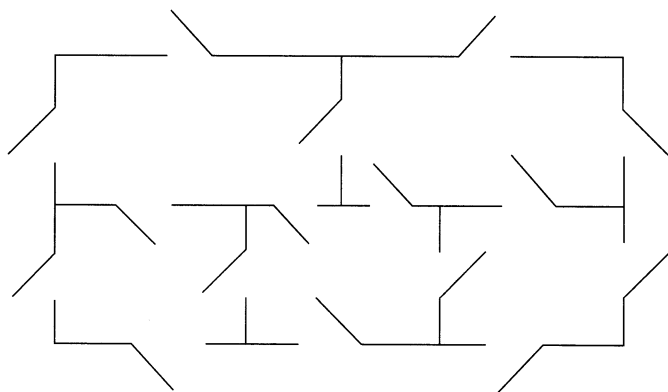
3. Zastosuj algorytm Fleury'ego do grafu przedstawionego na rysunku 6.16(a) do momentu, aż algorytm się załamie. Zaczynij od wierzchołka  $w$ .
4. Powtórz ćwiczenie 3 dla grafu przedstawionego na rysunku 6.16(c).
5. Weźmy graf pokazany na rysunku 6.17(a).



**Rysunek 6.17**

- (a) Opisz drogę Eulera dla tego grafu lub wyjaśnij, dlaczego taka droga nie istnieje.
- (b) Opisz cykl Eulera dla tego grafu lub wyjaśnij, dlaczego taki cykl nie istnieje.
6. Powtórz ćwiczenie 5 dla grafu przedstawionego na rysunku 6.17(b).
7. Czy jest możliwe, aby owad poruszający się wzdłuż krawędzi sześciangu przeszedł każdą krawędź dokładnie raz? Odpowiedź uzasadnij.
8. Zastosuj algorytm Fleury'ego, tak jak w przykładzie 3, aby otrzymać drogę Eulera w grafie przedstawionym na rysunku 6.11(a). Naszkicuj grafy pośrednie otrzymywane podczas działania algorytmu, tak jak zrobiliśmy to na rysunku 6.15.
9. Zbuduj graf mający zbiór wierzchołków  $\{0, 1\}^3$ , w którym wierzchołki  $v$  i  $w$  są połączone krawędzią, jeśli ciągi  $v$  i  $w$  różnią się na dokładnie dwóch współrzędnych.
  - (a) Ile składowych ma ten graf?
  - (b) Ile wierzchołków danego stopnia ma ten graf?
  - (c) Czy ten graf ma cykl Eulera?
10. Odpowiedz na te same pytania co w ćwiczeniu 9 dla grafu mającego zbiór wierzchołków równy  $\{0, 1\}^3$ , w którym wierzchołki  $v$  i  $w$  są połączone krawędzią, jeśli  $v$  i  $w$  różnią się na dwóch lub trzech współrzędnych.
11. (a) Pokaż, że jeśli graf spójny  $G$  ma dokładnie  $2k$  wierzchołków stopnia nieparzystego oraz  $k > 0$ , to zbiór  $E(G)$  jest rozłączną sumą

- zbiorów krawędzi  $k$  dróg prostych. *Wskazówka:* Dodaj więcej krawędzi, tak jak w dowodzie wniosku do twierdzenia 2.
- (b) Znajdź dwie rozłączne drogi proste takie, że suma ich zbiorów krawędzi będzie równa  $E(G)$  dla grafu mostów królewieckich z rysunku 6.10.
- (c) Zrób to samo dla grafu przedstawionego na rysunku 6.17(b) w ćwiczeniu 6.
12. Które grafy pełne  $K_n$  mają cykle Eulera?
13. Stara łamigłówka przedstawia pięciopokojowy dom mający szesnastoro drzwi, jak widać to na rysunku 6.18 Problem polega na tym, aby wyobrazić sobie, jak można obejść cały dom i przez każde drzwi przejść dokładnie raz.



Rysunek 6.18

- (a) Czy można tak przejść? Odpowiedź uzasadnij.
- (b) Jak zmieni się odpowiedź, jeśli drzwi między dwoma dużymi pokojami będą zamknięte?

## § 6.3. Drzewa

W tym paragrafie będziemy zajmować się grafami, które są acykliczne i spójne; nazywamy je **drzewami**. Ponieważ są one acykliczne, nie mają krawędzi wielokrotnych i pętli. Widzieliśmy już jedno drzewo na rysunku 5.1 w § 5.1. Oto kilka następujących przykładów.

**PRZYKŁAD 1** Na rysunku 6.19 pokazanych jest kilka drzew. Drzewa na rysunkach 6.19(a) i 6.19(b) są izomorficzne. Są one narysowane