Matematyka Dyskretna

Grafy

notatki

Definicja 1. *Niech V będzie zbiorem skończonym, E rodziną podzbiorów jedno lub dwu elementowych zbioru V. Wówczas grafem nazywamy parę $G = \langle V, E\rangle$.*

Elementy zbioru V nazywamy wierzchołkami (czasem, punktem w grafie) i są one zwyczajowo oznaczane $v_1, v_2, \ldots$, $u_1, u_2, \ldots$. Zbiór wierzchołków grafu G często jest oznaczany $V(G)$.

Elementy zbioru E nazywamy krawędziami i są one zwyczajowo oznaczane $r_1, e_2, \ldots$. Zbiór krawędzi grafu G często jest oznaczany $E(G)$. Krawędzie grafu będące jedno elementowym podzbiorem V nazywamy pętlami. Graf nie posiadający pętli nazywamy prostym.

Dwa wierzchołki v_1, v_2 są sąsiednie, jeżeli $\{v_1, v_2\}$ jest krawędzią. Mówimy, że wierzchołek v incyduje z krawędzią e jeżeli $v \in e$, tzn. istnieje wierzchołek w, dla którego $e = \{v, w\}$. Dwie krawędzie e_1, e_2 są sąsiednie, jeżeli $|e_1 \cap e_2| = 1$.

Krawędź $\{v, u\}$ oznaczamy często vu.

Zbiór krawędzi indykujących z wierzchołkiem v oznaczamy $N(v)$, formalnie $N(v) = \{w \in V : \{v, w\} \in E\}$. Liczebność zbioru $|N(v)|$ oznaczamy $deg(v)$.

Trasa < Ścieżka < Droga, Cykl – problem z nazewnictwem

(wikipedia vs K.A Ross, C.R.B. Wright vs Z. Palka, A. Ruciski ...)

Trasą nazywamy ciąg krawędzi $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{n-1}v_n$. Jeśli wszystkie krawędzie są różne, to trasę nazywamy ścieżką. W niektórych przypadkach zakładamy, że wierzchołki w ścieżce są różne. Różność wierzchołków jest wymuszana często przymiotnikiem prosta, tzn. ścieżką prostą nazywamy ścieżkę, w której wierzchołki są różne. Ścieżkę, w której wierzchołki są różne (z wyjątkiem ewentualnej równości wierzchołka pierwszego i ostatniego) nazywamy drogą. Jeżeli pierwszy i ostatni wierzchołek jest równy, to taką drogę nazywamy zamkniętą, czyli cyklem. W przypadku grafów (bez przymiotników), ciąg krawędzi wyznacza jednoznacznie ciąg wierzchołków, tj. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ i vice versa. W grafach, gdzie dopuszczalne są krawędzie wielokrotne, ta równoważność nie zachodzi, tzn. krawędzie wyznaczają jednoznacznie wierzchołki ale nie odwrotnie.

Podsumowują, na zajęciach wykorzystujemy nazewnictwo z książki K.A Ross, C.R.B. Wright, gdzie droga i ścieżką to synonim. Jeżeli wierzchołki są różne, z wyjątkiem co najwyżej pierwszego to taką drogę nazywamy prostą.

Wierzchołki nazywamy połączalnymi, jeżeli istnieje droga łącząca te wierzchołki. Graf nazywamy spójnym, jeżeli dowolne dwa jego wierzchołki są połączalne. Zbiór wierzchołków nazywamy spójną składową grafu, jeżeli dowolne dwa wierzchołki tego zbioru są połączalne. Składowa jest maksymalna, jeżeli nie jest właściwym podzbiorem innej składowej.

Definicja 2. *Niech V będzie zbiorem skończonym, A rodziną par elementowych zbioru V. Wówczas grafem skierowanym nazywamy parę $G = \langle V, A\rangle$.*

Elementy zbioru A nazywamy krawędziami skierowanymi albo łukami (częściej). Mówimy, że łuk $\langle v, u\rangle$ prowadzi od v (początku łuku) do u (końca łuku) i oznaczamy $v \to u$. Łuk ten wychodzi z v i wchodzi do u. Zbiór łuków wchodzących do v oznaczamy $N^{-}(v)$, a wychodzących $N^{+}(v)$. Liczebność tych zbiorów oznaczamy $deg_{-}(v)$, $deg_{+}(v)$ odpowiednio.

Pojęcia tras, ścieżek, dróg i cykli są zdefiniowane analogicznie jak w grafie, z tą różnicą, że zachowywany jest kierunek, tzn. trasą nazywamy ciąg łuków $v_1 \to v_2, v_2 \to v_3, v_3 \to v_4, \ldots, v_{n-1} \to v_n$, który często jest oznaczany $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to \ldots \to v_{n-1} \to v_n$

Definicja 3. *Niech dany będzie graf $G = \langle V, E \rangle$. Przyjmijmy również, że $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Wówczas macierzą incydęcji nazywamy macierz o wymiarach $n \times n$, określoną zależnością*

$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & \textit{jeżeli } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0 & \textit{jeżeli } \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

Definicja 4. *Niech dany będzie graf skierowany $G = \langle V, A \rangle$. Przyjmijmy również, że $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Wówczas macierzą incydęcji nazywamy macierz o wymiarach $n \times n$, określoną zależnością*

$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & \textit{jeżeli } \langle v_i, v_j \rangle \in E, \\ 0 & \textit{jeżeli } \langle v_i, v_j \rangle \notin E. \end{cases}$$

Definicja 5. *Graf skierowany nazywamy acyklicznym, jeżeli nie posiada cykli.*

Definicja 6. *Graf nazywamy drzewem, jeżeli nie posiada cykli.*

Liściem nazywamy każdy wierzchołek drzewa rzędu 1.

Twierdzenie 1. *Suma rzędów wierzchołków w grafie jest równa podwojonej liczbie krawędzi.*

Twierdzenie 2. *Zbiór krawędzi może być przedstawiony w postaci rozłącznych cykli, wtedy i tylko wtedy, gdy rząd każdego wierzchołka jest parzysty.*